2.5.8 Vzorec pro řešení obecné kvadratické rovnice

Předpoklady: 010101, 020501, 020503, 020507

Vrátíme se k obecné kvadratické rovnici: $ax^2+bx+c=0$.

Vzorec pro kořeny známe: $x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Kde se vzal?

Zkusíme nejdříve konkrétní rovnici: $x^2-4x+3=0$. Chceme výsledek ve tvaru: $x=....$, problém - x je v rovnici dvakrát.
Už jsme ho řešili u funkcí, zkusíme to stejně.

$x^2-4x+3=x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+3=(x-2)^2-4+3=(x-2)^2-1=0$.

$(x-2)^2-1=0$ - takové rovnice jsme řešili. Stačí, když závorku budeme vnímat jako jediné číslo: $(x-2)^2=1$.

$(x-2)=\pm\sqrt{1}$

Dopočítáme x:

x_1: $(x_1-2)=1\Rightarrow x_1-2=1\Rightarrow x_1=3$

x_2: $(x_2-2)=-1\Rightarrow x_2-2=-1\Rightarrow x_2=1$

$K=\{1;3\}$

Pedagogická poznámka: Doplnění na čtverec provádějí v předchozím postupu samozřejmě studenti sami a já při tom stíhám ty, kteří to nedokážou.

Př. 1: Ověř předchozí výsledek dosazením do rovnice.

$x=1$: $x^2-4x+3=1^2-4\cdot 1+3=0$

$x=3$: $x^2-4x+3=3^2-4\cdot 3+3=0$

Výsledek je správný, určitě by to stejně vyšlo i pomocí vzorce.

Př. 2: Zopakuj předchozí postup pro vyřešení kvadratické rovnice pro konkrétní rovnici $2x^2-4x-16=0$ a pro rovnici v obecném tvaru $ax^2+bx+c=0$, kde $a\neq 0$. Příklad řeš po jednotlivých krocích do dvou sloupců tak, aby jednotlivé kroky byly vedle sebe.

$2x^2-4x-16=0$	$ax^2+bx+c=0$
Vytkneme dvojku:	Vytkneme a:
$2x^2-4x-16=0$	$ax^2+bx+c=0$
$2(x^2-2x-8)=0 \quad /:2$	$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \quad /:a$ (jde to, víme $a\neq 0$)
Doplníme na čtverec:	Doplníme na čtverec:
$x^2-2x\cdot 1+1^2-1^2-8=0$	

$(x-1)^2 - 9 = 0$

$$x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Teď bychom chtěli udělat odmocninu, ale to můžeme jenom u nezáporných čísel $\Rightarrow$ musí platit $\frac{b^2-4ac}{4a^2} > 0$. Jmenovatel zlomku je druhá mocnina $4a^2 = (2a)^2$, záleží pouze na výrazu v čitateli (diskriminantu) $b^2 - 4ac = D > 0$.

Ostatní možnosti rozebereme potom:

Odmocníme pravou stranu:

$(x-1)^2 = 9$

$(x-1) = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dopočteme kořeny:

$x_1 - 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 4$

$x_2 - 1 = -3 \Rightarrow x_2 = -2$

$$x_1 + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$K = \{-2; 4\}$

$$K = \left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

Pedagogická poznámka: Při řešení předchozího příkladu kontrolujeme výsledky po jednotlivých krocích. Chci po studentech, aby nepočítali konkrétní rovnici najednou, ale vždy udělali pouze jeden krok, který poté provedou s obecnou rovnicí.

Ještě rozebereme všechny možnosti při odmocňování diskriminantu:

$D = b^2 - 4ac < 0$

Měli bychom odmocnit záporné číslo (nejde)

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 =$ záporné číslo

(taky nejde)

$K = \emptyset$

$D = b^2 - 4ac = 0$

$x + \frac{b}{2a} = \pm 0$

$x = -\frac{b}{2a}$

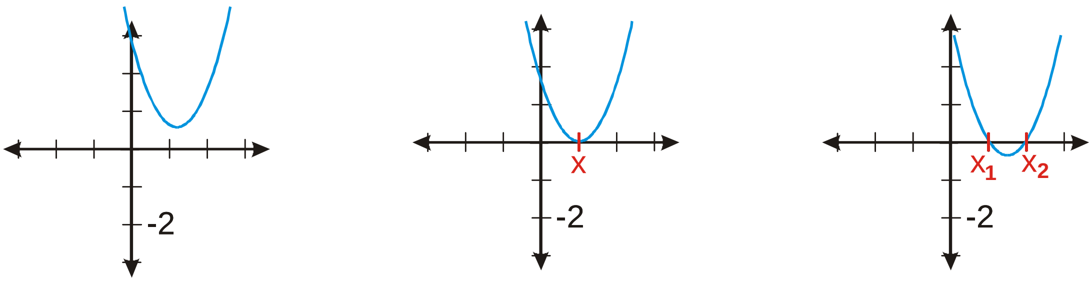
Jediné řešení $K = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

$D = b^2 - 4ac > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Přesně, jak jsme předpověděli pomocí grafů:



Pedagogická poznámka: Pokud je čas můžeme ukázat příklad 7 z hodiny 020506, kde je ihned vidět, že čitatel zlomku, který způsobuje posun ve svislém směru, se rovná právě odvozenému diskriminantu.

Př. 3: Vyřeš kvadratickou rovnici $x^2 - x - 2 = 0$.

$$x^2 - x - 2 = 0 \qquad x_1, x_2 = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 + 8}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$K = \{-1; 2\}$

Př. 4: Vyřeš kvadratickou rovnici $3x^2 - 2x + 5 = 0$.

$$3x^2 - 2x + 5 = 0 \qquad x_1, x_2 = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$$

Diskriminant je záporný $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení.

$K = \emptyset$

Pedagogická poznámka: Všechny body následujícího příkladu nevyřeší nikdo. Zda je nechat na dobrovolnou domácí přípravu nebo na cvičení, záleží na času, který máte k dispozici.

Př. 5: Vyřeš kvadratickou rovnici dosazením do vzorce:

a) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $3x^2 - x + 4 = 0$

c) $0{,}15x^2 - 0{,}03x - 2 = 0$

d) $104x^2 - 166x + 66 = 0$

e) $4x^2 - 20x - 2 = 0$

f) $3x^2 - \pi x + 2 = 0$

g) $x^2 + x - 2x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

h) $x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{5} = 0$

i) $x^2 + x + x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$

a)

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0 \qquad x_1, x_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{-1}$$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{-1} = 3-\sqrt{13}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{-1} = 3+\sqrt{13}$

$K = \{3-\sqrt{13}; 3+\sqrt{13}\}$

b)

$3x^2 - x + 4 = 0$ $\qquad$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{-47}}{6}$

Diskriminant je záporný $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení. $K = \emptyset$

c)

$0{,}15x^2 - 0{,}03x - 2 = 0 \quad / \cdot 100$

$15x^2 - 3x - 200 = 0$ $\qquad$ $x_1, x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-200)}}{2 \cdot 15} = \frac{3 \pm \sqrt{12009}}{30}$

$x_1 = \frac{3+\sqrt{12009}}{30}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{3-\sqrt{12009}}{30}$

$K = \left\{\frac{3-\sqrt{12009}}{30}; \frac{3+\sqrt{12009}}{30}\right\}$

d)

$104x^2 - 166x + 66 = 0 \quad / : 2$

$52x^2 - 83x + 33 = 0$ $\qquad$ $x_{1,2} = \frac{83 \pm \sqrt{(-83)^2 - 4 \cdot 52 \cdot 33}}{2 \cdot 52} = \frac{83 \pm \sqrt{25}}{104} = \frac{83 \pm 5}{104}$

$x_1 = \frac{83+5}{104} = \frac{88}{104} = \frac{11}{13}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{83-5}{104} = \frac{78}{104} = \frac{3}{4}$

$K = \left\{\frac{3}{4}; \frac{11}{13}\right\}$

e)

$4x^2 - 20x - 2 = 0$ $\qquad$ $x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{20 \pm \sqrt{432}}{8} = \frac{20 \pm 12\sqrt{3}}{8} = \frac{5}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$K = \left\{\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$

f)

$3x^2 - \pi x + 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{\pi \pm \sqrt{(-\pi)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 24}}{6} \doteq \frac{\pi \pm \sqrt{9{,}87 - 24}}{6}$

Diskriminant je záporný $\Rightarrow$ rovnice nemá řešení.

$K = \emptyset$

g)

$x^2 + x - 2x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

$$x_{1,2}=\frac{-\left(1-2\sqrt{2}\right)\pm\sqrt{\left(1-2\sqrt{2}\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-\sqrt{2}\right)}}{2\cdot1}=\frac{-1+2\sqrt{2}\pm\sqrt{1-4\sqrt{2}+8+4\sqrt{2}}}{2}=$$
$$=\frac{-1+2\sqrt{2}\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1+2\sqrt{2}\pm3}{2}$$
$$x_1=\frac{-1+2\sqrt{2}+3}{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2} \qquad x_2=\frac{-1+2\sqrt{2}-3}{2}=\frac{-4+2\sqrt{2}}{2}=-2+\sqrt{2}$$
$$K=\left\{-2+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right\}$$
h)
$$x^2-2x\sqrt{3}+\sqrt{5}=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-\left(-2\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4\cdot1\cdot\sqrt{5}}}{2\cdot1}=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-4\sqrt{5}}}{2}=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{4\left(3-\sqrt{5}\right)}}{2}=$$
$$=\frac{2\sqrt{3}\pm2\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}=\sqrt{3}\pm\sqrt{3-\sqrt{5}}$$
$$x_1=\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{5}} \qquad x_2=\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$$
$$K=\left\{\sqrt{3}-\sqrt{3-\sqrt{5}};\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right\}$$
i)
$$x^2+x+x\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-\left(1+\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2-4\cdot1\cdot\sqrt{3}}}{2\cdot1}=\frac{-1-\sqrt{3}\pm\sqrt{1+2\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}}}{2}=$$
$x_{1,2}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\pm\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}$ - výraz pod odmocninou je určitě kladný, ale odmocnit ho neumíme. Zdá se, že jsme v koncích $\Rightarrow$ zkusíme vnitřek odmocniny upravit jiným způsobem:
$$\sqrt{1+2\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}}=\sqrt{1-2\sqrt{3}+3}=\sqrt{1^2-2\cdot1\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$$
pod odmocninou je druhá mocnina. Že je závorka záporná, nevadí, protože před odmocněním ji mocníme na druhou a tím z ní uděláme kladné číslo:
$x_{1,2}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\pm\left|1-\sqrt{3}\right|}{2}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\pm\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}$ (absolutní hodnotu můžeme nahradit normální závorkou, protože je před ní $\pm$, které z jejího vnitřku udělá kladné i záporné číslo)
$$x_1=\frac{-1-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3} \qquad x_2=\frac{-1-\sqrt{3}-\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}=-1$$
$$K=\left\{-\sqrt{3};-1\right\}$$

Pedagogická poznámka: Bylo by dobré, kdyby studenti pochopili vynechání absolutní hodnoty v posledním bodě. Pokud budou mít problémy, stačí demonstrace na jednodušších číslech: $\pm|-2| \Rightarrow +|-2| = 2$ a $-|-2| = -2$, což jsou stejná čísla, jako když rovnou napíšeme $\pm(-2)$.

Př. 6: Petáková:
strana 12/cvičení 4 c) e) h) i)
strana 12/cvičení 5

Shrnutí: Vzorec pro kořeny kvadratické rovnice vychází z doplnění na čtverec a převedení na ryze kvadratickou rovnici.